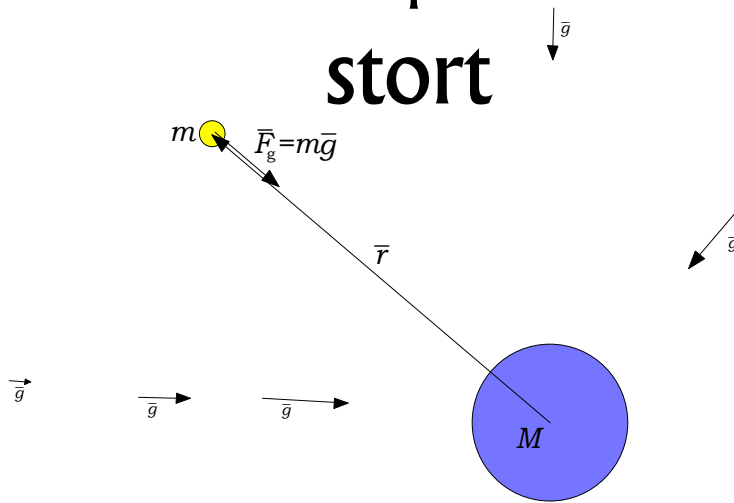
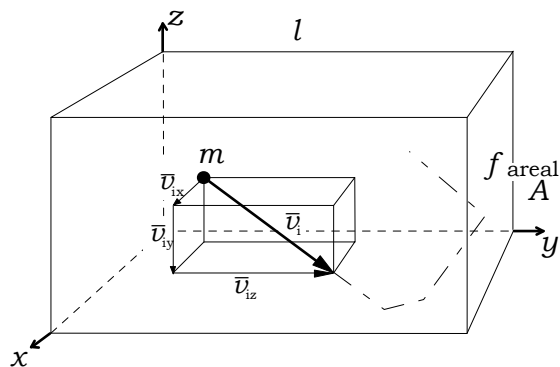


# PRINCIPIA

i  
stort



og  
småt



SelvTryk

# Indholdsfortegnelse

1.	Indledning	1
2.	Kinematik på vektorform	1
2.1	Grundlaget	1
2.1.1	Koordinater.	1
2.2	Hastighed	2
2.3	Acceleration	2
2.3.1	Koordinater	2
2.4	Jævn bevægelse	3
2.5	Konstant accelereret bevægelse	3
2.5.1	Koordinater	3
2.6	Vores lille roterende enhedsvektor	4
2.7	Jævn cirkelbevægelse	4
2.7.1	Koordinater	4
3.	Principia, 1687	5
3.1	Første lov	5
3.2	Anden lov	6
3.3	Tredje lov	6
3.3.1	Eksempel	6
3.3.2	Eksempel	7
3.4	Gravitationsloven	7
4.	Keplers love	8
5.	Virialteoremet	12
6.	Stød	13
6.1	Endimensionalt elastisk stød	13
6.2	Fuldstændigt uelastisk stød	13
6.3	Todimensionalt stød mellem to ens elastiske kugler	14
6.4	Eftertænksomt efterskrift	14
7.	Tværsnit	15
7.1	Neutronindfangningstværsnit	15
7.2	Moderering af neutroner	16
8.	Fotonreaktioner	17
8.1	Absorptionskoefficienten	17
8.2	Middelvejlængde	17
8.3	Comptonspredning	18
8.4	Pardannelse	20

9. Kinetisk molekylteori	21
9.1 Makroskopisk udgangspunkt	21
9.2 Mikroskopisk model	21
9.3 Diskussion af modellen	23
9.4 Middelenergi pr. molekyle	24
10. Opgaver	25
11. STIKORDSREGISTER	27

## 1. INDLEDNING

Dette hæfte søger at demonstrere hvor grundlæggende Newtons love var for de følgende århundreders fysik.

Med behandlingen af Kepler love vises hvorledes Newtons love er det fuldstændige grundlag for beskrivelse af bevægelserne af alle større legemer i universet.

Men også på det mikroskopiske plan udgør Newtons love enten det fuldstændige grundlag (idealgasser) eller en helt afgørende del af grundlaget (atomare stød og fotonstød) for vores forståelse.

En moderne bevægelsesbeskrivelse på grundlag af Newtons love bygger på vektorregning og differentiation af vektorfunktioner. Der vil vi derfor starte.

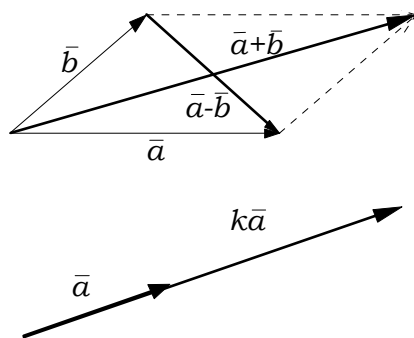
## 2. KINEMATIK PÅ VEKTORFORM

### 2.1 Grundlaget

Det er synd for vektorregningen at den som regel indføres på basis af koordinater. Derved går noget af fidusen ved vektorer tabt.

Vi her derfor i fysik behandlet de væsentligste bevægelsesformers kinematik uden at bruge koordinater. Det repeteres her med koordinatregning som eksempelmateriale.

De basale operationer kan defineres på det velkendte geometriske grundlag



O.S.V.!

Når  $\vec{r}$  står for vektorer og  $k$  for konstanter, gælder de distributive love

$$(k_1 \pm k_2) \vec{r} = k_1 \vec{r} \pm k_2 \vec{r} \quad (1)$$

$$k(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2) = k\vec{r}_1 \pm k\vec{r}_2 \quad (2)$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2) = \vec{r} \cdot \vec{r}_1 \pm \vec{r} \cdot \vec{r}_2 \quad (3)$$

For differentiation af vektorfunktionen  $\vec{r}(t)$  gælder at  $\vec{r}'(t)$  er tangent til banekurven pegende i bevægelsesretningen og med en længde der angiver farten. Det kan forstås ved fordybelse i figuren på næste side.

Når  $\vec{c}$  står for en konstant vektor,  $\vec{r}(t)$  for en differentiabel vektorfunktion,  $k$  for en reel konstant og  $f(t)$  for en differentiabel reel funktion, sikrer de distributive love at beviserne for følgende differentiationsregler forløber fuldstændigt som de tilsvarende beviser for reelle funktioner. I har gennemført i matematik.

$$(\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \pm \vec{r}_2'(t) \quad (4)$$

$$(f(t) \vec{r}(t))' = f'(t) \vec{r}(t) + f(t) \vec{r}'(t) \quad (5)$$

$$(k \vec{r}(t))' = k \vec{r}'(t) \quad (5')$$

$$(f(t) \vec{c})' = f'(t) \vec{c} \quad (5'')$$

$$(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2'(t) \quad (6)$$

$$(\vec{r}(f(t)))' = \vec{r}'(f(t)) f'(t) \quad (7)$$

Alt dette kan gennemføres uden anvendelse af koordinater.

#### 2.1.1 Koordinater.

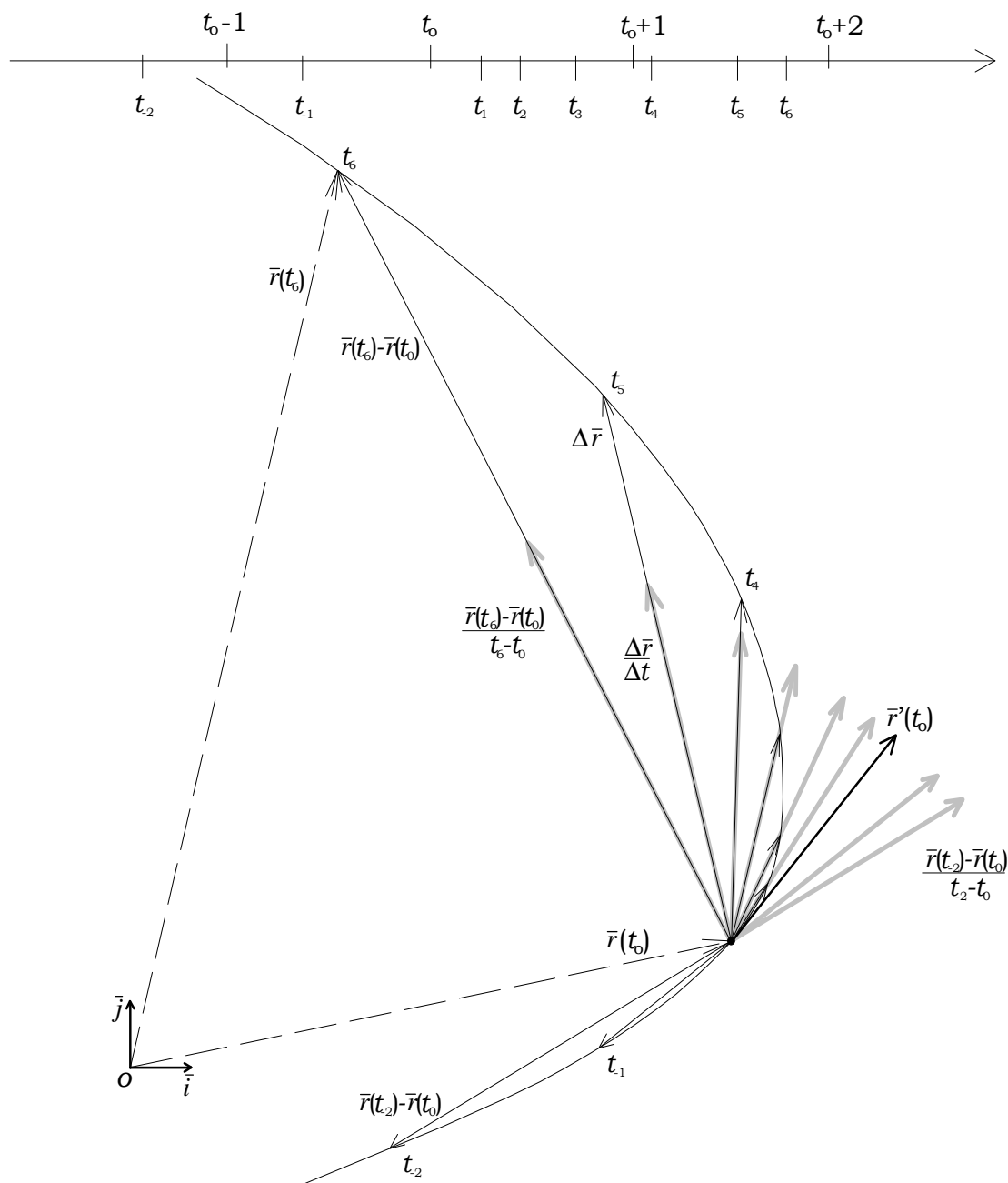
Hvis  $\vec{r}(t)$  er givet ved de tre koordinatfunktioner  $(x(t), y(t), z(t))$  i koordinatsystemet  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  gælder

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

Anvendelse af (4) og (5'') viser at

$$\vec{r}'(t) = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} + z'(t) \vec{k} \quad (8)$$

så at  $\vec{r}'(t)$  har koordinatsættet  $(x'(t), y'(t), z'(t))$ .



## 2.2 Hastighed

Begrebet hastighed er defineret som tilbagelagt strækning pr. tid hvor hastighedsvektoren skal pege i bevægelsesretningen. Af differentiationsfiguren ses at når bevægelsen er givet ved  $\vec{r}(t)$  så er øjeblikshastigheden  $\vec{v}(t)$  til tidspunktet  $t$  det samme som  $\vec{r}'(t)$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) \quad (9)$$

## 2.3 Acceleration

Begrebet acceleration er defineret som hastighedsændring pr. tid. Når hastigheden er givet ved  $\vec{v}(t)$  så er

øjeblikssaccelerationen  $\vec{a}(t)$  til tidspunktet  $t$  det samme som  $\vec{v}'(t)$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) \quad (10)$$

### 2.3.1 Koordinater

Hastighed og acceleration findes ved koordinatvis differentiation altså

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

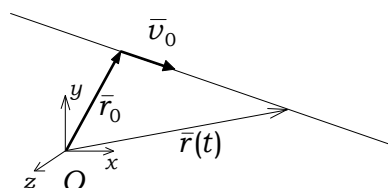
## 2.4 Jævn bevægelse

Herved forstås en bevægelse med konstant hastighed,  $\bar{v}(t) = \bar{v}_0$  for alle  $t$ .

Af (10) følger at  $\bar{a}(t) = \bar{0}$  for alle  $t$ . Da  $\bar{r}'(t) = \bar{v}_0$  er konstant, må  $\bar{r}(t)$  være den lineære funktion

$$\bar{r}(t) = \bar{v}_0 t + \bar{r}_0 \quad (11)$$

hvor  $\bar{r}_0$  er begyndelsesstedet. Dette er parameterfremstillingen for en ret linie.



## 2.5 Konstant accelereret bevægelse

Når accelerationen er konstant  $\bar{a}(t) = \bar{a}_0$  må der gælde

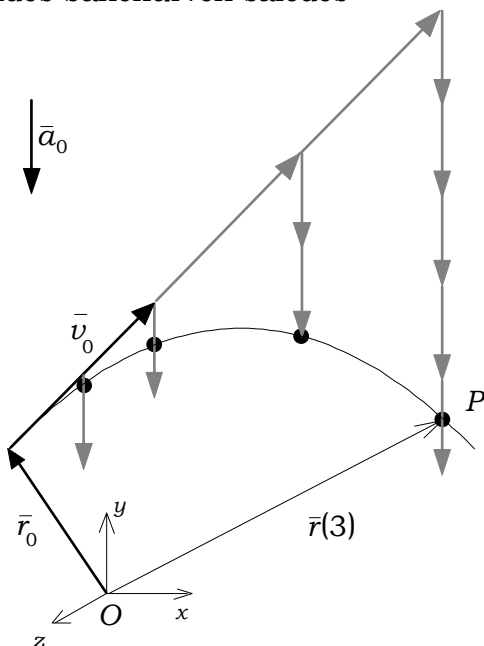
$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \quad (12)$$

$$\bar{v}(t) = \bar{a}_0 t + \bar{v}_0 \quad (13)$$

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{2} \bar{a}_0 t^2 + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0 \quad (14)$$

hvor  $\bar{r}_0$  og  $\bar{v}_0$  er begyndelsesbetingelserne.

Med givne begyndelsesbetingelser findes banekurven således



Banekurven (14) er en parabel.

### 2.5.1 Koordinater

**Opgave:** En kugle skydes op fra punktet  $(1, 1, 1)$  med begyndelseshastigheden  $(1, 2, 3)$ . Den har en konstant acceleration  $(0, 0, -2)$ .

Hvor er den til tiden 3?

Hvornår er den højst oppe?

Hvor lander den på  $xy$ -planen?

**Svar:** Med koordinater er (12), (13) og (14)

$$\bar{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinater til  $t=3$

$$\bar{r}(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} 3^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kuglen er højst oppe til  $t_1$

$$\Leftrightarrow v_z(t_1) = 0 \Leftrightarrow -2t_1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1 = 1,5$$

Kuglen lander på  $xy$ -planen til  $t_2$

$$\Leftrightarrow z(t_2) = 0 \Leftrightarrow -t_2^2 + 3t_2 + 1 = 0$$

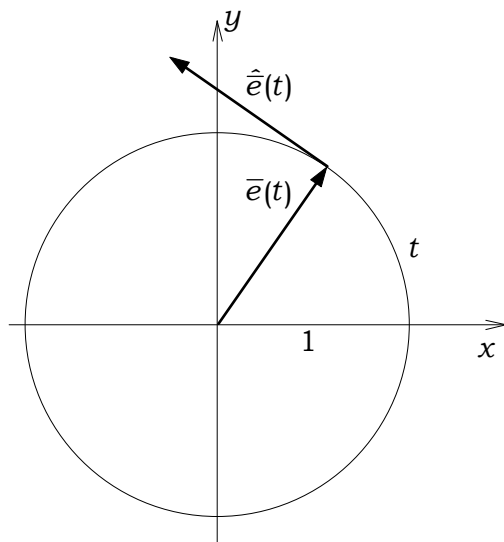
$$\Leftrightarrow t_2 = 3,303$$

Kuglen lander i

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} 3,303^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 3,303 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4,303 \\ 7,606 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2.6 Vores lille roterende enhedsvektor

Vi har defineret en særlig vektorfunktion  $\bar{e}(t)$  i planen som den enhedsvektor hvis retningsvinkel er  $t$ .



Da den tilbagelagte strækning er lig med parameteren  $t$  er farten 1. Heraf ses at  $\bar{e}'(t) = \hat{e}(t)$ .

## 2.7 Jævn cirkelbevægelse

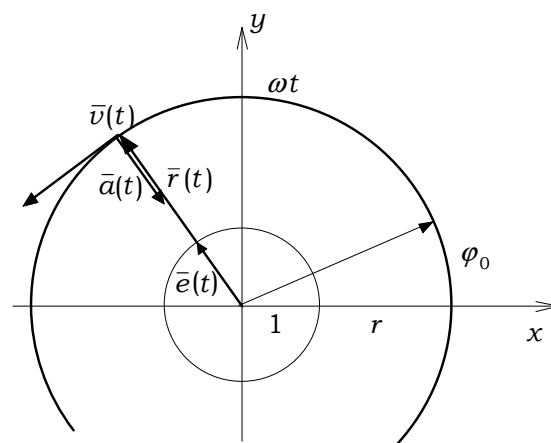
Den jævne cirkelbevægelse med centrum i origo, radius  $r$ , vinkelhastighed  $\omega$  og begyndelsesfase  $\varphi_0$  er givet ved

$$\bar{r}(t) = r \bar{e}(\omega t + \varphi_0) \quad (15)$$

$$\bar{v}(t) = r\omega \hat{e}(\omega t + \varphi_0) \quad (15')$$

$$\bar{a}(t) = -r\omega^2 \bar{e}(\omega t + \varphi_0) \quad (15'')$$

hvor  $\bar{v}(t)$  og  $\bar{a}(t)$  er fundet ved (5') og (7)



For størrelserne af radius, hastighed og acceleration gælder

$$r = r = r\omega^0 \quad (16)$$

$$v = r\omega = r\omega^1 \quad (16')$$

$$a = r\omega^2 = r\omega^2 \quad (16'')$$

Af de to sidste udledes

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (17)$$

### 2.7.1 Koordinater

Ved at indføre koordinater

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \varphi_0) \\ r \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

og differentiere koordinatvis kan man bevise (15), (15') og (15'') på en meget mere omstændelig måde.

Værsgo!

### 3. PRINCIPIA, 1687

I 1687 offentliggjorde *Isac Newton* (1642-1727) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, kort *Principia*, det værk hvormed han stadfæstede overgangen mellem middelalderens og den moderne tids natursyn (NB bemærkninger i forbindelse med kvantefysikken næste spalte).

Efter videnskabshistorikeren *Thomas S. Kuhn* kaldes en sådan overgang et *paradigmeskifte*. Noget sådant kommer ikke ud af den blå luft, men forberedes ved at det gældende paradigme udsættes for en række udfordringer som det ikke kan holde stand til.

*Aristoteles'* (384-322, f.v.t.) verdensbillede blev i 1200-tallet forenet med kirkens lære til det middelalderlige verdensbillede med jorden (-og mennesket, i egen selvforståelse kronen på Guds skaberværk) i centrum. Verden og mennesket var i kirkens vold.

De omvæltende udfordringer kom især fra astronomien hvor den opfattelse at solen var centrum med jorden som bare en af 7 planeter kredsende omkring vandt frem. Navne i denne proces var især *Kopernicus* (1473-1543), *Tycho Brahe* (1546-1601), *Kepler* (1571-1630) og *Gallilei* (1564-1642). På den filosofiske front nævner man *Descartes* (1596-1650). Og så endelig: *Newton*.

Herefter var verden i videnskabens vold. Den ydre verden fungerede efter universelle love som et perfekt urværk. Alle astronomiske begivenheder (og -formodede man - også alle jordiske) kunne forudberegnes med vilkårlig nøjagtighed. Den menneskelige bevidsthed stod udenfor og iagttog reglerne ved hjælp af hvilke det var enhver forundt at kunne forstå verden fuldstændigt. Oplysningstiden, frigørelsesbevægelser, politiske revolutioner, den industrielle revolution, råstofjagten, imperialismen, den økonomiske liberalisme, spirende demokratideer m.m. fulgte (- til trods for at det nye videnskabssyn faktisk beskrev verden som *deterministisk*!)

Når jeg indledningsvist kaldte denne periodes natursyn for det moderne, så er det fordi verden stadig ser sådan ud i vores hoveder skønt der i viden-

skaben (fysikken) siden er sket endnu et paradigmeskift med kvantemekanikken.

Det har imidlertid endnu ikke haft nær den samme gennemslagskraft i den generelle bevidsthed. Om det skyldes at det simpelthen er af mindre rækkevidde eller at essensen er så fremmedartet at rækkevidden ikke er fordøjet af toneangivende tænkere, kan vi måske berøre i en anden sammenhæng (uden at jeg tør love det endelige svar!)

Vi vil her behandle de love som *Newton* publicerede i *Principia*.

Så kort kan de skrives

$$\begin{aligned}
 1. \quad \bar{F}_{\text{res}} &= \bar{0} \Leftrightarrow \bar{v} \text{ er konstant} \\
 2. \quad \bar{F}_{\text{res}} &= m \bar{a} \\
 3. \quad \bar{F}_{12} &= -\bar{F}_{21} \\
 4. \quad \bar{F}_g &= -G \frac{M m}{r^2} \frac{\bar{r}}{r}
 \end{aligned} \tag{18}$$

men de kan næppe stå uden kommentarer. *Newton* bruger 626 sider (i skolens engelske oversættelse. Originalen var naturligvis på latin). Vi nøjes med mindre.

#### 3.1 Første lov

kaldes også *inertiens lov*. Banalt tolket kunne det se ud, som om den følger af 2. lov. Så *Newtons* mening må have været en anden!

Første lov gælder ikke i alle koordinatsystemer (eller ståsteder). Det opdager man hurtigt hvis man forsøger at spille billard i en togvogn. Vi kan antage at billardbordet hele tiden er vandret så at tyngdekraften på billardboldene hele tiden ophæves af lige så store og modsatrettede kræfter fra bordet. Den resulterende kraft er derfor  $\bar{0}$ . Alligevel vil billardboldene finde på mærkelige ting hvis toget bremser eller kører ind i en kurve.

Et koordinatsystem hvori 1. lov gælder kaldes et *inertialsystem*.



Hvis altså en partikel som ikke er påvirket af kræfter ses at bevæge sig med konstant hastighed, så betragtes den fra et *inertialsystem*.

At der faktisk findes inertialsystemer er en erfarings sag som vi behandler nærmere i klassen.

Første lov er en afgørende forudsætning for 2. lov som middel til udpegning af inertialsystemer.

### 3.2 Anden lov

er mekanikkens grundlov. Den siger:

Når en partikel med masse  $m$  bevæger sig under påvirkning af den resulterende kraft  $\vec{F}_{\text{res}}$ , og beskrivelsen foretages i et inertialsystem, så gælder

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \vec{a} . \quad (19)$$

Newton udtrykte selv 2. lov ved hjælp af begrebet *bevægelsesmængde* eller *impuls*. Det er meget vigtigt i den klassiske mekanik og endnu vigtigere i kvantemekanikken, så vi skrider straks til en definition.

En partikel med masse  $m$  og hastighed  $\vec{v}$  har bevægelsesmængden  $\vec{p}$  givet ved

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (20)$$

Dermed kan anden lov omskrives

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \vec{a} = m \vec{v}' = (m \vec{v})' = \vec{p}'$$

(næstsidste omskrivning udnytter at  $m$  er konstant).

Under en partikels bevægelse gælder altså at den resulterende kraft er den tidsafledede af bevægelsesmængden, og bevægelsesmængden er en stamfunktion til den resulterende kraft.

### 3.3 Tredje lov

kaldes *loven om aktion og reaktion*.

Den siger at når to legemer 1 og 2 påvirker hinanden med kræfter, så vil kraften  $\vec{F}_{12}$  på 1 fra 2 og kraften  $\vec{F}_{21}$  på 2 fra 1 være lige store og modsatrettede.

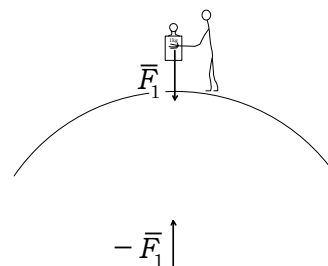
Begreberne aktion og reaktion kan altid ombyttes. Det er derfor mere passende at sige at Newtons tredje lov påstår at alle kræfter opstår som par af lige store og modsatrettede kræfter

som udgår fra forskellige legemer. De kan gensidigt kaldes årsag til hinanden.

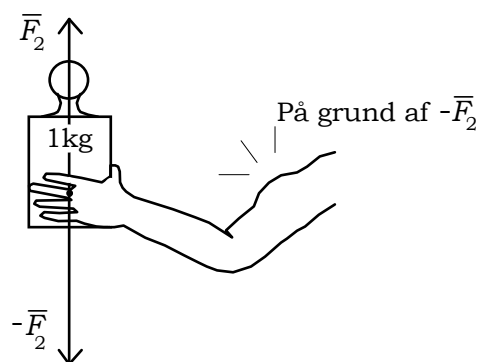
Loven bliver her illustreret med to helt forskellige eksempler.

#### 3.3.1 Eksempel

Jeg står med et 1 kg-lod i hånden. På det virker en tyngdekraft  $\vec{F}_1$  på 1 kp. Den skyldes jordens tilstedeværelse. Makkeren  $-\vec{F}_1$  til tyngdekraften på loddet hiver altså opad i jorden med 1 kp.



Man kunne tro at makkeren til tyngdekraften på loddet er den kraft  $\vec{F}_2$  hvormed jeg bærer loddet. Den er jo også 1 kp og opadrettet (hvorfor loddet er i ro).



Men dens makker  $-\vec{F}_2$  hiver nedad i min hånd. De er gensidigt årsag til hinanden. Hvis jeg nemlig slipper, forsvinder  $\vec{F}_2$  og  $-\vec{F}_2$  samtidigt, mens tyngdekraften på loddet består lige såvel som kraften opad i jorden.

Kraften opad i jorden, hva' er nu det for noget pjat? Hvordan kan den måles?

Det kan den hvis man tager et ordentligt lod, Månen f.eks. Månen holdes i sin bane af tyngdekraften fra jorden. Altså påvirker Månen jorden med

en lige så stor og modsatrettet kraft. Og *den* gør sig gældende! Den betyder nemlig at Jorden slingrer i sin bane hvilket bl.a. bevirker at vi har tidevand.

### 3.3.2 Eksempel

Ved et *isoleret system* forstås et system som ikke er påvirket af kræfter udefra, *ydre kræfter*, eller for hvilket de udefra kommende kræfter ophæver hinanden.

Vi betragter et isoleret system bestående af to legemer. Man kan tænke på to vogne på en luftpudebænk eller en kernereaktion mellem to partikler.

De to legemer kan påvirke hinanden indbyrdes med såkaldte *indre kræfter*. Der kan altså være tale om kraften  $\vec{F}_{12}$  på 1 fra 2 og  $\vec{F}_{21}$  på 2 fra 1.

Da disse kræfter er hinandens makkere (de adlyder så 3. lov) og samtidig resulterende kræfter på de to legemer (så 2. lov kan bruges), gælder altså at de to legemer bevæger sig således at følgende udsagn er sande hele tiden

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)' &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &\text{ er konstant} \end{aligned}$$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2$  kaldes *systemets totale bevægelsesmængde* eller *totale impuls*.

Under forudsætning af 2. lov er 3. lov altså ensbetydende med følgende vigtige bevarelsessætning her i generaliseret udgave:

For et isoleret system er den totale bevægelsesmængde bevaret.

 (21)

Afsnittene fra 1.5 og noterne ud er anvendelser af denne sætning.

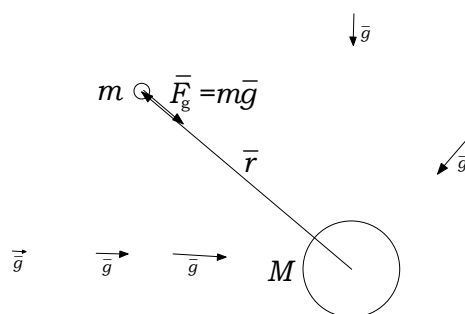
## 3.4 Gravitationsloven

De tre første love er de generelle bevægelseslove som gælder for alle kræfter. Den fjerde lov kaldes *gravitationsloven*.

$$\vec{F}_g = -G \frac{M m \vec{r}}{r^2 r} \quad (22)$$

Den beskriver tyngdekrafter kvantitativt.

Den er her formuleret naturligt for et centralfelt omkring en stor masse  $M$  idet  $\vec{r}$  peger ud mod den lille masse  $m$ .  $\vec{F}_g$  er så gravitationskraften på  $m$ .



Omskrivningen

$$\vec{F}_g = -G \frac{M m \vec{r}}{r^2 r} = -G \frac{M \vec{r}}{r^2 r} m = \vec{g} m$$

viser at tyngdeaccelerationen  $\vec{g}$  omkring et centrallegeme beregnes ved

$$\vec{g} = -G \frac{M \vec{r}}{r^2 r} \quad (23)$$

Ved feltet om et centrallegeme forstås vi et område hvor et enkelt stort legeme er ene om at bestemme gravitationskræfter på mindre legemer som anbringes i området, d.v.s. i feltet omkring centrallegemet.

I dette felt afhænger  $\vec{g}$  kun af  $M$  og  $\vec{r}$ .

Vi kan derfor tænke os  $\vec{g}$ 'er anbragt overalt i feltet, klar til at tage imod den lille masse  $m$  og levere gravitationskraften på denne ved multiplikation.

Således kan gravitationsfeltet visualiseres, (se tegningen hvor der skal tænkes  $\vec{g}$ 'er overalt).

### 4. KEPLERS LOVE

Blandt højdepunkterne i "Anni Mirabilis" står Keplers (1571-1630) tre love. Kepler var elev af Tycho Brahe (1546-1601) som konstruerede flere epokegørende præcise astronomiske instrumenter hvormed han opnåede en observationsnøjagtighed som flere generationer af astronomer efter ham byggede på.

Kepler byggede på Brahes observationer især af Mars da han udledte sine tre love for planetbevægelserne.

1. Planetbanerne er ellipser med solen i det ene brændpunkt.
2. For en given planet er stedvektorens arealhastighed (det overstrøgne areal pr. tid) konstant.
3.  $a^3/T^2$  er konstant inden for solsystemet idet  $a$  er den halve storakse og  $T$  er omløbstiden.

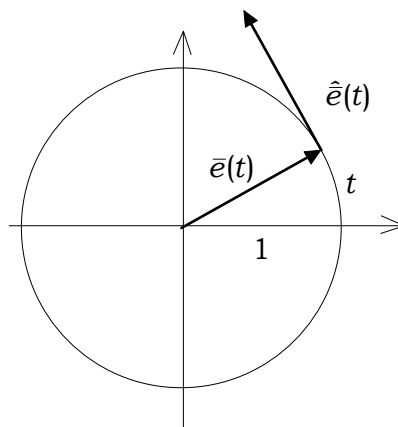
Siden oldtiden anså man de himmelske, evige bevægelser for at være de geometrisk set fuldendte cirkler. Og Kepler søgte - det viser andre af hans arbejder - den store harmoni og enhed i naturen. Det må have gjort ondt på ham at Brahes målinger så overbevisende har tvunget ham til at indse 1.lov. Til gengæld var det et helt afgørende skub for næste generation:

Da Newton i 1687 afsluttede Anni Mirabilis byggede han afgørende på Keplers love.

Newton har formodentligt både arbejdet ud fra Keplers love og den anden vej ud fra intuitive ideer tilbage til Keplers love da han fik tingene til at gå op og fandt sin gravitationslov.

Vi vil her gå hvad der for os er naturligt frem (hvilket altså er historisk baglæns) og udlede Keplers love ud fra Newtons.

Vi vil endvidere anvende en moderne notation som udnytter den differentialregning som Newton måtte opfinde for at kunne tumle problemerne, samt den vektorregning som først endnu senere gør fremstillingen yderligere kompakt.



Enhedsvektoren  $\bar{e}(t)$  er stedvektor for et punkt der bevæger sig på enhedscirklen. Den tilbagelagte buelængde er lig med  $t$  hvorfor farten er 1.

Bevægelsesretningen er tangent til cirklen i den positive omløbsretning, hvorfor der gælder

$$\bar{e}'(t) = \hat{e}(t)$$

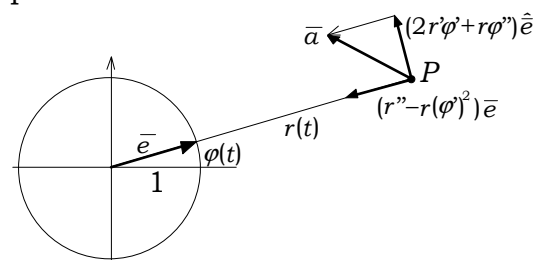
For den sammensatte funktion  $\bar{e}(\varphi(t))$  gælder

$$\bar{e}'(\varphi(t)) = \hat{e}(\varphi(t))\varphi'(t)$$

En vilkårlig bevægelse af et punkt  $P$  kan beskrives ved

$$\bar{r}(t) = r(t)\bar{e}(\varphi(t))$$

hvor  $(r, \varphi)$  er de polære koordinater til punktet  $P$ .



For at forsimple det følgende arbejde, vil vi undlade alle argumenterne til de tre funktioner  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ,  $r = r(t)$  og  $\varphi = \varphi(t)$  og tilmed (ret frækt!) for  $\bar{e} = \bar{e}(\varphi(t))$ , men endelig for den sidste huske at den er en sammensat funktion.

Vi får så

$$\bar{r} = r\bar{e}$$

$$\bar{v} = r'\bar{e} + r\hat{e}\varphi'$$

$$\bar{a} = r''\bar{e} + r'\hat{e}\varphi' + r\hat{e}\varphi'' - r\bar{e}(\varphi')^2 + r\hat{e}\varphi''$$

eller

$$\bar{a} = (r'' - r(\varphi')^2) \bar{e} + (2r'\varphi' + r\varphi'') \hat{e}$$

Vi antager nu at  $\bar{r}(t)$  er stedvektor for et legeme med massen  $m$  som bevæger sig i gravitationsfeltet af et legeme med masse  $M$ . Kraften på  $m$  er derfor

$$\bar{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \bar{e}$$

og ifølge Newtons 2. lov har vi

$$\begin{aligned} -G \frac{M}{r^2} \bar{e} \\ = (r'' - r(\varphi')^2) \bar{e} + (2r'\varphi' + r\varphi'') \hat{e} \end{aligned}$$

hvoraf vi får

$$\begin{cases} r'' - r(\varphi')^2 = -G \frac{M}{r^2} & (24) \\ 2r'\varphi' + r\varphi'' = 0 & (25) \end{cases}$$

Den sidste omskrives til

$$\frac{2r'}{r} = -\frac{\varphi''}{\varphi'} \Leftrightarrow \frac{2dr}{r} = -\frac{d\varphi'}{\varphi'}$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln r = -\ln \varphi' + \text{konstant}$$

$$\Leftrightarrow \ln(r^2 \varphi') \text{ er konstant}$$

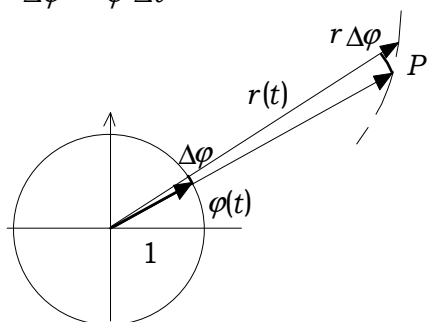
$$\Leftrightarrow r^2 \varphi' = k \quad (26)$$

Her kommer **Keplers 2. lov**:

Det af stedvektoren overstrøgne areal vokser med tiden og kaldes  $A(t)$ .

I et lille tidsrum  $\Delta t$  vokser centervinklen  $\varphi$  med

$$\Delta \varphi = \varphi' \Delta t$$



I samme tidsrum overstryger stedvektoren en trekantlignende figur med arealet (for  $\Delta t$  lille)

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r(r\Delta\varphi) = \frac{1}{2} r^2 \varphi' \Delta t = \frac{1}{2} k \Delta t$$

Heraf ses at  $\Delta A/\Delta t \rightarrow \frac{1}{2} k$  for  $\Delta t \rightarrow 0$  så at

$$A'(t) = \frac{1}{2} k$$

som er den konstante arealhastighed.

Når vi nu skal videre til **Keplers 1. lov**, så skal vi eliminere  $t$  af (24) og (25), d.v.s. finde  $r(\varphi)$ .

Det kan lade sig gøre hvis  $\varphi(t)$  er monoton, og det må den være som følge af den konstante arealhastighed.

Det vi før kaldte  $r(t)$ , skriver vi nu som  $r(t) = r(\varphi(t))$  og søger at fjerne  $t$ .

Vi kan så differentiere  $r$  med hensyn til både  $t$  og  $\varphi$  og må derfor bruge den lidt tungere betegnelse for differentialkvotienter. De tidligere mærker var alle  $\frac{d}{dt}$ .

Let's go: (26) skrives

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{r^2}$$

$r$  differentieres så som en sammensat funktion

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{k}{r^2} = -k \frac{d(r^{-1})}{d\varphi}$$

hvor sidste overgang bevises baglæns. Vi differentierer endnu engang med hensyn til  $t$ :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( -k \frac{d(r^{-1})}{d\varphi} \right) =$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left( -k \frac{d(r^{-1})}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} = -k \frac{d^2(r^{-1})}{d\varphi^2} \frac{k}{r^2}$$

altså

$$r'' = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2} \frac{d^2(r^{-1})}{d\varphi^2}$$

Nu skal der indsættes i (24):

$$-\frac{k^2}{r^2} \frac{d^2(r^{-1})}{d\varphi^2} - r \left( \frac{k}{r^2} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

eller

$$\frac{d^2(r^{-1})}{d\varphi^2} = -\left( r^{-1} - \frac{GM}{k^2} \right)$$

Denne andenordens differentiaalligning er på den form som I i matematik ville skrive

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y + b \Leftrightarrow \frac{d^2(y-b)}{dx^2} = -(y-b)$$

med løsningen

$$y - b = B \cos(x - x_0)$$

hvor  $B$  og  $x_0$  er arbitrære konstanter som fastlægges ved begyndelsesbetingelserne.

Det betyder her

$$r^{-1} - \frac{GM}{k^2} = B \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{\frac{GM}{k^2} + B \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

hvor den arbitrære konstant  $B$  er udskiftet med en anden,  $e$ . Yderligere har vi sat

$$p = \frac{k^2}{GM}$$

Hvis man kender til fremstilling af keglesnit i polære koordinater, vil de allerede her være genkendt.

Da I imidlertid (vist) ikke får dem at se i matematik, må vi fortsætte.

Det hurtigste er at fatte sin TI82 og gøre følgende (Manual, 5-1ff):

**MODE**, Func, Pol.

**Y=**

$r_1 = P / (1 - E \cos(\theta - T))$

**WINDOW**

Xmin=-3

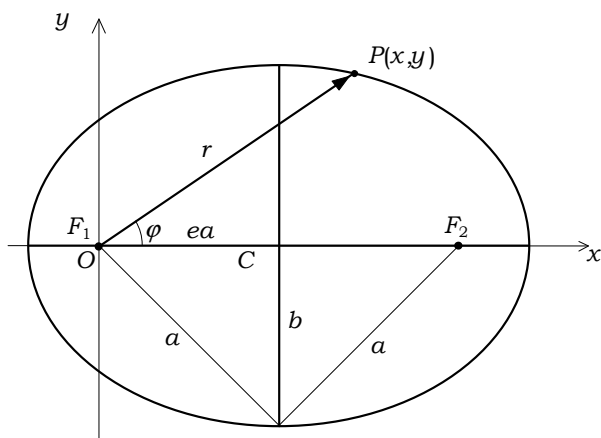
Xmax=3

Ymin=-2

Ymax=2

- og så kan man ellers eksperimentere med forskellige værdier af  $p$ ,  $e$  og  $\varphi_0$ .

Se hvordan  $p$ ,  $e$  og  $\varphi_0$  må bestemmes af begyndelsesbetingelserne.



Noget tungere er det at oversætte til retvinklede koordinater.

Der gælder

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Vi behandler kun  $\varphi_0 = 0$ . Andre værdier betyder blot en drejning af figuren.

Der indgår herefter et  $a$  som *ikke* er acceleration og et  $b$  som *ikke* er den konstant fra matematikundervisningen som var på kortvarig gæstevist nederst på foregående side!

For  $e \neq 1$  vælges  $a$  så at  $p = a(1 - e^2)$  hvorefter vi omskriver

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

$$\Leftrightarrow r - e r \cos \varphi = p$$

$$\Leftrightarrow r - e x = a(1 - e^2)$$

$$\Leftrightarrow r^2 = (a(1 - e^2) + e x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)^2 + (e x)^2 + 2a(1 - e^2) e x$$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - e^2) - 2 e a x(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)^2$$

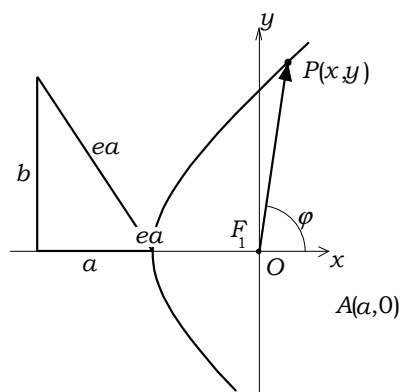
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 e a x + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2 - a^2 e^2$$

$$\Leftrightarrow (x - e a)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - e a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hvor  $b$  er indført ved den sædvanlige relation  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ .

Det ses at ligningen for  $e < 1$  fremstiller en ellipse med centrum  $(e a, 0)$  og at  $e$  er ellipsens excentricitet.



For  $e=1$  fremstiller ligningen en parabel og for  $e > 1$  en hyperbel. Vi vil lade beviserne herfor ligge!!

Disse keglesnit er dog bestemt interessante i vores solsystem.

Et himmellegeme der kommer udefra og rammer vores solsystem, vil forlade det igen hvis det ikke mister mekanisk energi ved sammenstød eller energitappende tæt passage med en planet. Det vil i så fald følge en *hyperbel*.

Der er teorier om at der til vores solsystem hører et større antal stofansamlinger/planetoider i meget stor afstand fra solen med en enorm stor omløbstid.

Ved tiltrækning fra måske en planet uden for Pluto, måske fra hinanden, kan de bibringes en hastighed ind mod solen.

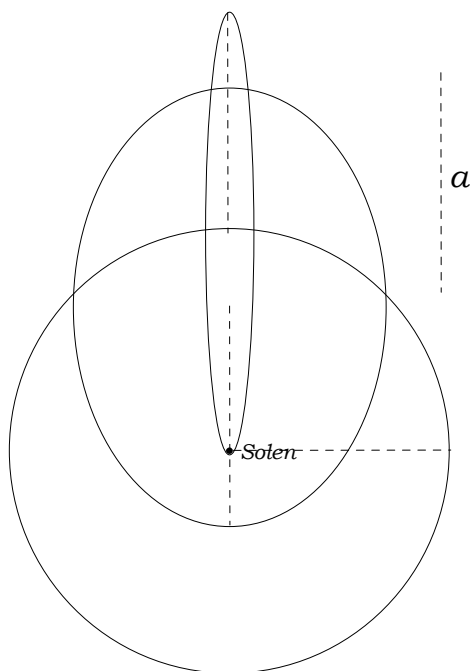
De tænkes at være kilden til kometer hvoraf nogle kun ses en gang. De bevæger sig nærmest i en *parabel*.

Andre kometer – den berømteste er Halleys med en periode på 76 år. Forudsigelse af dens genkomst i 1758 på grundlag af Newtons love var afgørende for deres bredere accept- vender tilbage med jævne mellemrum. De bevæger sig i meget *langstrakte ellipser* ( $e$  tæt på 1).

Se f.eks.

[http://www.dr.dk/videnom/somme\\_r/artikel/c/kometer.htm](http://www.dr.dk/videnom/somme_r/artikel/c/kometer.htm)

-eller søg på kometer!



For at indse **Keplers 3. lov** plukker vi følgende sammenhænge fra de foregående sider:

$$p = \frac{k^2}{GM}$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$p = a(1 - e^2)$$

Af de to sidste følger

$$b^2 = ap$$

Endvidere husker vi at den konstante arealhastighed for en given planet var  $\frac{1}{2}k$ .

Idet en ellipses areal er  $\pi ab$  fås

$$k = \frac{2\pi ab}{T}$$

hvor  $T$  er omløbstiden. Hermed fås

$$GM = \frac{k^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 p}$$

$$= \frac{4\pi^2 a^2 a p}{T^2 p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

Da  $GM$  er den samme for alle planeterne, ses Keplers 3. lov at være opfyldt.

Normalt udledes den på gymnasieniveau kun under forudsætning af at planetbanen er en cirkel.

Det er unægteligt også lettere:

Centripetalaccelerationen = tyngdeaccelerationen siger:

$$r\omega^2 = G\frac{M}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow r\frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{M}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = GM$$

som jo (heldigvis!) er indeholdt i vores resultat.

Men det indeholder jo netop ikke det som var det nye i Keplers indsigt (1. lov), bruddet med den antikergræske forestilling om himmelbevægelserne som ideale cirkelbevægelser. De tre ellipsebaner til venstre har alle samme omløbstid!

Men ikke samme arealhastighed!

## 5. VIRIALTEOREMET

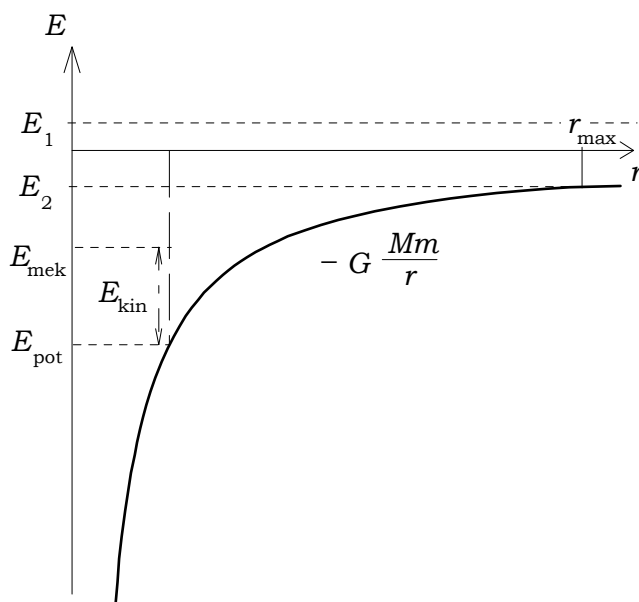
Vi betragter et legeme med massen  $m$  (f. eks. en planet, komet m.m.) i feltet fra et centrallegeme med massen  $M$  (f. eks. solen). Af udtrykket (22) fås kraftens størrelse

$$F(r) = G \frac{Mm}{r^2} \quad (22')$$

Heraf kan udledes

$$E_{\text{pot}}(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

for den potentielle energi i afstanden  $r$  når nulpunktet for  $E_{\text{pot}}$  er valgt i det uendeligt fjerne (se mekaniknoterne s. 18).



Et legeme der kommer mod os fra det uendeligt fjerne har altså  $E_{\text{kin}} > 0$  og  $E_{\text{pot}} = 0$  og derfor  $E_{\text{mek}} > 0$ , ( $E_1$ ).

Et sådant legeme vil på vej ind mod solen vinde i  $E_{\text{kin}}$  hvad det mister i  $E_{\text{pot}}$ , men med uændret  $E_{\text{mek}}$ . Med mindre det ramler direkte ind i solen vil det opnå en mindste afstand og samtidig største fart hvorefter det igen vil forsvinde i det uendelige.

Første gang man iagttager en ukendt komet, er det meget spændende at konstatere om den er af den netop omtalte type med positiv totalenergi, eller om den har negativ totalenergi d.v.s. den er bundet til solen. Den har

altså været her før og den kommer igen, ( $E_2$ ).

En komet med meget lille lilleakse - altså næste ikke noget baneareal - vil bevæge sig næsten ud til  $r_{\text{max}}$  hvor den næsten går i stå.

En komet med større lilleakse vil selv når den er længst væk, have en vis  $E_{\text{kin}}$  og når derfor ikke ud til  $r_{\text{max}}$ .

En planet med konstant afstand til solen (det har planeterne så næsten) har konstant  $E_{\text{pot}}$  og vil af samme grund have en konstant  $E_{\text{kin}}$ .

Virialteoremet som nu skal bevises, siger at for en sådan planet gælder

$$E_{\text{mek}} = \frac{1}{2}E_{\text{pot}} = -E_{\text{kin}}$$

jf. figuren og bemærk fortegnene!

(22'), (17) og Newtons 2. lov giver

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow G \frac{Mm}{r} = 2 E_{\text{kin}}$$

$$\Leftrightarrow -E_{\text{pot}} = 2 E_{\text{kin}}$$

Heraf følger

$$E_{\text{mek}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = -E_{\text{kin}}$$

og beviset er udført!

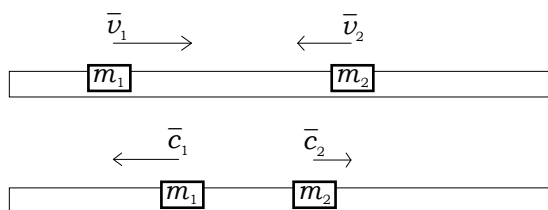
Et legeme som kommer fra det uendelige og skal anbringes i en cirkulær bane om solen skal altså have fjernet halvdelen af tabet i potentiel energi, mens den anden halvdel skal bevares til den bevægelse som banen kræver.

## 6. STØD

Impulsbevarelsessætningen for isolerede systemer har mange anvendelser. Vi vil i dette afsnit anvende den på forskellige typer stød mellem to legemer, som f. eks. endimensionalt mellem to vogne på en luftpudebænk eller todimensionalt for to (billard-)kugler.

### 6.1 Endimensionalt elastisk stød

Herved forstås et stød hvor den kinetiske energi er bevaret,  $Q = 0$ .



Masser:  $m_1, m_2$

Hastigheder før stødet:  $v_1, v_2$

Hastigheder efter stødet:  $c_1, c_2$

$c_1$  og  $c_2$  betragtes som ubekendte.

Kinetiskenergi- og impulsbevarelse giver

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1(v_1^2 - c_1^2) = m_2(c_2^2 - v_2^2) \\ m_1(v_1 - c_1) = m_2(c_2 - v_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + c_1 = v_2 + c_2 \\ m_1(v_1 - c_1) = m_2(c_2 - v_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = v_2 - v_1 \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{cases}$$

For dette ligningssystem gælder

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} v_2 - v_1 & -1 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & v_2 - v_1 \\ m_1 & m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{vmatrix}$$

Løsningen bliver derfor

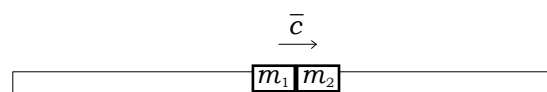
$$c_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (27)$$

$$c_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (27')$$

Et stød der ikke er elastisk kaldes uelastisk! (d.v.s. så snart  $Q \neq 0$ ).

### 6.2 Fuldstændigt uelastisk stød

Herved forstås det tilfælde hvor tabet af kinetisk energi er maksimalt, d.v.s. vognene hænger sammen efter stødet.



Masser:  $m_1, m_2$

Hastigheder før stødet:  $v_1, v_2$

Hastighed efter stødet:  $c$

$c$  betragtes som ubekendt.

Her er den kinetiske energi ikke bevaret. Men impulsen er stadig! Altså

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) c$$

$$c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$



### 6.3 Todimensionalt stød mellem to ens elastiske kugler

Følgende behandling dækker to billardkugler hvis man ser bort fra rotation og gnidning, og atomare sammenstød mellem to ens partikler når  $Q = 0$  som f. eks. molekylsammenstød i homogene gasser og neutronnedbremsning i letvandsreaktorer (neutroner mod protoner i vandmolekylerne).

Med betegnelser som skulle være til at gennemskue giver energi(kinetisk!)- og impulsbevarelse

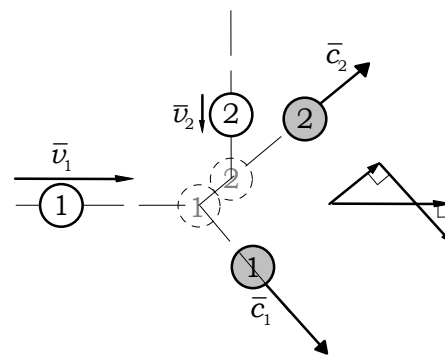
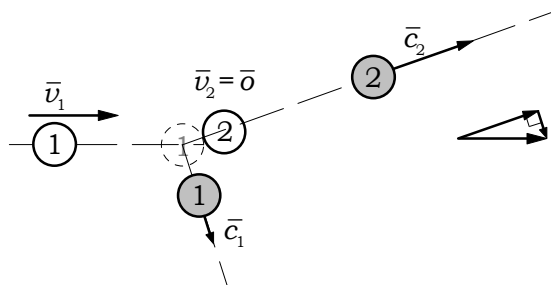
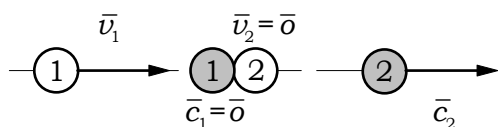
$$\begin{cases} \frac{1}{2} m \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}_2^2 = \frac{1}{2} m \bar{c}_1^2 + \frac{1}{2} m \bar{c}_2^2 \\ m \bar{v}_1 + m \bar{v}_2 = m \bar{c}_1 + m \bar{c}_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 = \bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2 \\ \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \end{cases} \quad (28)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 = \bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2 \\ (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)^2 = (\bar{c}_1 + \bar{c}_2)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 \quad (29)$$

Denne betingelse finder især anvendelse hvis de to prikprodukter er nul. Det kan forekomme hvis en af hastighederne er nul eller hvis hastighederne er ortogonale.



### 6.4 Eftertænksomt efterskrift

For den enkelte partikel gælder

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad (30)$$

Den kinetiske energi kan altså ikke ændre sig uden at impulsen ændrer sig.

Men *summen* af kinetisk energi for *to* partiler kan ændre sig uden at *summen* af impulserne ændrer sig.

Summen af impulserne ændrer sig ikke hvis blot summen af ydre kræfter er nul – uanset hvad den kinetiske energi finder på!

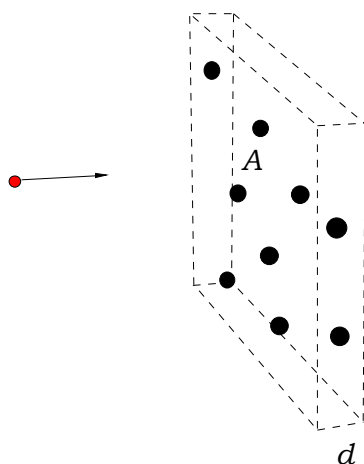
Den kinetiske energi kan godt vokse, nemlig hvis stødet udløser potentiel energi. Det kan ske makroskopisk, f. eks. ved raketfremføring i det tomme rum, men er især af overvældende betydning i fusionsprocesserne i stjernerne.

## 7. TVÆRSNIT

Vi tegner her molekyler og anbringer dem med omhu således at vi kan se hvorledes det rammende og det ramte molekyle fortsætter efter sammenstødet. Så er det jo bare ærgerligt at vi aldrig kan se dem!

Men også her kan et begreb knytte forbindelse mellem den mikroskopiske og den makroskopiske verden, nemlig *tværsnit*.

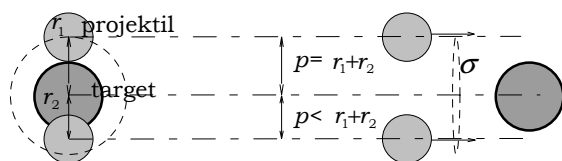
Vi skelner mellem targetpartikler som tænkes anbragt i et tyndt lag og projektiler som bombarderer laget.



Til hver targetpartikel er knyttet et areal på

$$\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$$

hvor  $r_1 + r_2$  er summen af de to radier.



Hvis *stødparameteren*  $p$  er mindre end  $(r_1 + r_2)$ , så sker der et sammenstød.

Det viste tynde lag har arealet  $A$ , tykkelsen  $d$  og indeholder  $N$  targetpartikler.

Sandsynligheden for sammenstød er altså

$$\mathcal{P} = \frac{N\sigma}{A} \quad (31)$$

$N$  kan findes ved targetmaterialets massefylde  $\rho$  og dets molmasse  $M$ .

$$N = \frac{\rho A d N_A}{M}$$

hvormed (31) kan skrives

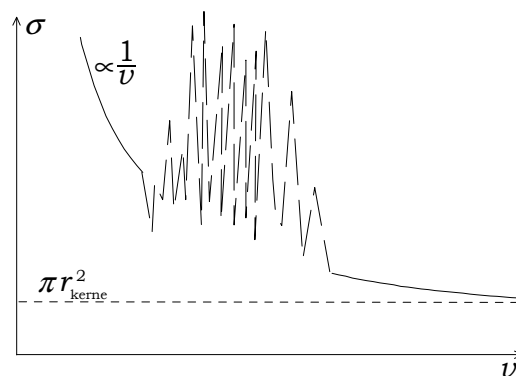
$$\mathcal{P} = \frac{N\sigma}{A} = \frac{\rho d N_A}{M} \sigma \quad (32)$$

Denne ligning muliggør bestemmelse af  $\sigma$ .  $\mathcal{P}$  bestemmes som det relative antal stød ud af et stort antal projektiler (d.v.s. det antal der ikke kommer igennem i forhold til det indfaldende antal).  $d$  kan måles, resten er tabelværdier.

### 7.1 Neutronindfangningstværsnit

Med hensyn til kernesammenstød kan de ikke altid forstås som resultat af stød mellem kugler. Den kvantemekaniske beskrivelse knytter bølger til partikler. Resonanser mellem projektil og target betyder ofte reaktionssandsynligheder meget større end forventet ud fra "partiklernes dimensioner".

Overordnet kan følgende grundtræk for neutronreaktionstværsnit anføres:



Spredning af hurtige neutroner på kerner er kugle på kugle og tværsnittet nærmer sig  $\pi r_{\text{kerne}}^2$ .

For langsomme neutroner varierer tværsnittet omvendt proportionalt med hastigheden  $\nu$ , d.v.s. proportionalt med den tid neutronen er i nærheden af kernen. Det absolutte niveau varierer meget for forskellige kerner.

Imellem disse yderligheder forekommer resonansområdet.

Nogle få tværsnit kan ses i Fysikkens spor, s. 199 (tværsnittet er her

angivet i barns,  $b=10^{-28} \text{ m}^2$ , men det har de glemt at skrive).

For vandkølede fissionsreaktorer er følgende uddrag af Kay & Laby relevant. Det er neutroner mod moderatorer og kontrolstænger. Der er tale om middelværdier over det termiske spektrum af  $\sigma_n$ , elastisk spredning, og  $\sigma_A$ , absorption. Tallene kan altså bruges i forbindelse med termiske neutroner.

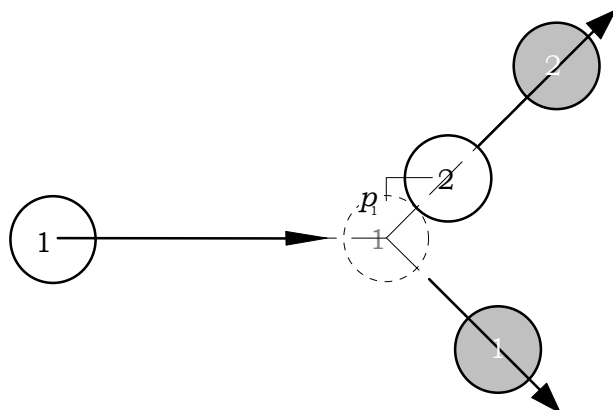
	$\sigma_n/b$	$\sigma_A/b$
H i $\text{H}_2\text{O}$	45,3	0,294
D i $\text{D}_2\text{O}$	5,10	$0,46 \cdot 10^{-3}$
$^{10}\text{B}$	2,13	3398
Cd	10,1	2900

## 7.2 Moderering af neutroner

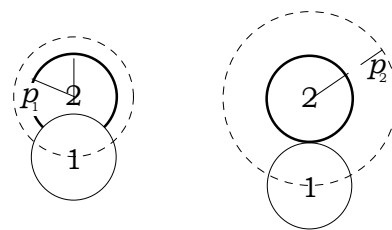
Når en neutron støder mod en proton er der i langt de fleste tilfælde (45,3 i forhold til 0,294) tale om elastisk spredning med et tværsnit som kan ses i tabellen.

I gennemsnit taber neutronen halvdelen af sin energi. Det kan indses ved at betragte tværsnit  $\sigma_{>45^\circ}$  for afbøjning  $>45^\circ$  og  $\sigma_{<45^\circ}$  for afbøjning  $<45^\circ$ .

På følgende figur er vist et sammenstød mellem et molekyle i bevægelse og et i hvile. Først er vist geometrien i et sammenstød som resulterer i  $45^\circ$  afbøjning og lige deling af energien på de to partikler.



Nedenunder er dette stød vist set fra partikel 1 tillige med et stød som lige netop snitter.



Afstanden mellem de to partiklers centre kaldes stødparameteren, her  $p_1 = \sqrt{2} r$  og  $p_2 = 2 r$  hvor  $r$  er partiklernes radius.

Vi har at tværsnittet for overhovedet at ramme er

$$\sigma_n = \pi p_2^2 = 4\pi r^2,$$

mens tværsnittet for at den indtrængende partikel mister mere end halvdelen af sin energi, er det halve, nemlig

$$\sigma_{>} = \pi p_1^2 = 2\pi r^2$$

hvilket altså også bliver tilbage til  $\sigma_{<}$ .

I middel mister en neutron altså pr. stød halvdelen af sin energi.

## 8. FOTONREAKTIONER

Når lys med frekvensen  $\nu$  afsætter energi, så sker det i portioner, kvanter af størrelsen

$$E_\nu = h\nu \quad (33)$$

Energien som den f. eks. ses på en fotografisk plade, er lokaliseret til et enkelt molekyle sølvbromid som så ved fremkaldelsen breder sølvudskillelsen til et helt krystal, korn.

Når lys ved fotoelektrisk effekt slår elektroner ud af en metaloverflade, er det en enkelt elektron ad gangen der modtager energien.

Lys optræder altså ved energiudveksling som partikler, *fotoner*.

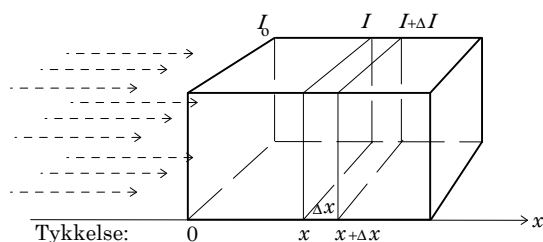
Vi skal nu se hvorledes partikelaspektet af fotoner også omfatter impuls og hvorledes fotoner i stød mod med elektroner må behandles fuldstændigt som partiklerne i de foregående afsnit.

Vi starter med at udvide den behandling der allerede er givet af den fotoelektriske effekt i atomfysiknoterne. Hvis der er tale om fotoelektrisk effekt er fotonen væk hvis den overhovedet har givet sig til kende.

Beskrivelsen gælder også andre stødprocesser hvor projektilet kan fortsætte med mindre energi efter et stød. Den alt-eller-intet-proces som betragtningerne bygger på er altså "ramme eller ikke ramme".

Det er almindeligt at tale om absorptionskoefficient selv om "ramme" ikke betyder fuldstændig absorption i en proces.

### 8.1 Absorptionskoefficienten



Hvis projektilerne passerer tykkere lag af targetstoffet, absorberes/rammer de som beskrevet i afsnit 3.4 i Atom- og kernefysiknoterne.

Her byggede vi på

$$-\Delta I = \mu I(x) \Delta x \quad (34)$$

og fandt

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (35)$$

hvor intensiteten  $I$  er bestemt som funktion af den tykkelse  $x$ , som projektilerne har passeret uden at ramme.

$\mu$  kaldes den *lineære absorptionskoefficient*.

Dette afsnits højdepunkt er når vi nu kan knytte denne sammen med begrebet tværsnit.

$-\Delta I / I(x)$  (det relative antal af projektiler der rammer) er jo  $\mathcal{P}$  for  $\Delta x = d$  således at (32) og (34) giver

$$\mu = \frac{\rho N_A}{M} \sigma \quad (36)$$

### 8.2 Middelvelængde

-også kaldet "mean free path".

Det antal projektiler som tilbage-lægger strækningen  $x$ , men herefter kolliderer indenfor strækningen  $\Delta x$  er

$$-\Delta I = -I'(x) \Delta x$$

Den gennemsnitlige tilbagelagte vej-længde inden kollision, middelvel-længden  $x_m$ , er derfor

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{I_0} \int_0^\infty x(-I'(x)) dx \\ &= \frac{1}{I_0} \int_0^\infty I_0 e^{-\mu x} dx = \int_0^\infty e^{-\mu x} dx \\ &= \frac{1}{-\mu} [e^{-\mu x}]_0^\infty = \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

Der gælder altså

$$\boxed{\mu x_m = 1} \quad (37)$$

og fra kernefysiknoterne

$$\boxed{\mu x_{1/2} = \ln 2} \quad (20')$$

hvor  $x_{1/2}$  er halveringstykkelsen.

### 8.3 Comptonspredning

Vi starter med nogle grundlæggende formler for

- 1) partikler uden hvilemasse,  $m_0 = 0$ ,
- 2) partikler med hvilemasse,  $m_0 > 0$ .

Partikler der udbreder sig med lyshastighed, kan ikke have hvilemasse. *Fotoner har altså ingen hvilemasse.* Energien og massen er kinetisk, alene knyttet til bevægelsen med lysets hastighed  $c$ .

Når en foton har energi

$$E_\nu = h\nu \quad (33)$$

må den i følge Einsteins masse-energi-relation

$$E = mc^2 \quad (38)$$

have masse

$$m_\nu = \frac{E_\nu}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (39)$$

og impuls

$$p_\nu = m_\nu c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (40)$$

hvor  $\lambda$  er fotonens bølgelængde.

Vi er her inde på relativitetsteoriens område hvor vores (3.mFY's) erfaring ikke er overvældende. Vi må derfor bemærke når vi foretager os ting vi ikke har endevendt grundigt.

Anvendelsen af (38) til udledning af (39) er vi fortrolige med.

Men at (40) kan udledes ved bare at gange massen med  $c$ , har vi ikke set før. Og at det har mening, må komme an på en eksperimentel afgørelse.

En sådan blev gennemført af Arthur Compton i 1922-23. Det gøres ved at beskrive stød mellem fotoner og elektroner og behandle fotonerne som partikler med energi, masse og impuls givet ved (33), (39) og (40).

Disse samler vi i

$$p_\nu c = m_\nu c^2 = E_\nu = h\nu \quad (41)$$

For partikler med hvilemasse  $m_0 > 0$  og relativistisk masse  $m$  gælder

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (42)$$

hvor  $v$  er partiklens hastighed.

Endvidere er

$$E_{\text{kin}} = mc^2 - m_0c^2 \quad (43)$$

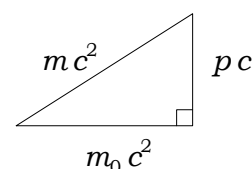
og impulsen

$$p = mv \quad (44)$$

Ved lidt opskrivninger af (42) og (44) fås den vigtige relativistiske sammenhæng

$$(mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2 \quad (45)$$

Den kan huskes ved tegningen



(41) er det specialtilfælde af (45) hvor  $m_0 = 0$ , naturligvis.

Også den klassiske sammenhæng

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad (30)$$

er et specialtilfælde af (45) som kan omskrives til

$$(mc^2 + m_0c^2)(mc^2 - m_0c^2) = p^2c^2$$

som for  $m \rightarrow m_0$  går over i

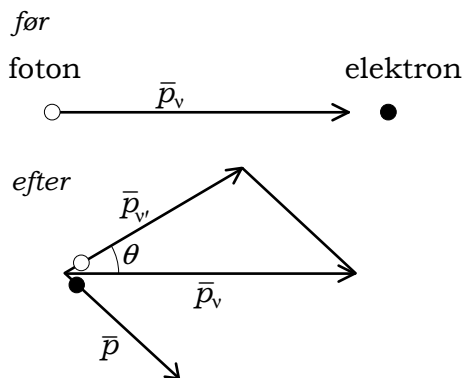
$$2m_0c^2 \cdot E_{\text{kin}} = p^2c^2$$

som straks fører til (30). Dette er endnu et eksempel på korrespondensprincippet.

Ved en comptonspredning rammer en foton med frekvens  $\nu$  en elektron som ligger stille.

Ved stødet overfører fotonen noget af sin energi og sin impuls til elektronen. Derved opstår en foton med mindre frekvens  $\nu'$  (- eller man kan sige at fotonen bliver spredt uelastisk).

Figuren viser impulser før og efter stødet. Den oprindelige foton med frekvensen  $\nu$  har impulsen  $\vec{p}_\nu$ , den spredte foton med frekvensen  $\nu'$  har impulsen  $\vec{p}_{\nu'}$ . Elektronens impuls kaldes  $\vec{p}$ .



En foton med en given frekvens  $\nu$  kan spredes i alle vinkler. Vi karakteriserer spredningen ved vinklen  $\theta$ .

Impulsbevarelsen giver så ved hjælp af cosinusrelationen

$$p^2 = p_\nu^2 + p_{\nu'}^2 - 2 p_\nu p_{\nu'} \cos \theta$$

Ved multiplikation med  $c^2$  og anvendelse af (41) omskrives denne til

$$(pc)^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu') \cos \theta \quad (47)$$

Elektronens hvilemasse kaldes  $m_0$  og dens relativistiske masse  $m$ .

Energibevarelse giver

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + m c^2$$

eller

$$m c^2 - m_0 c^2 = h\nu - h\nu' \quad (48)$$

Af de følgende to ligninger fremkommer den første ved (45) og (47), mens den anden er (48) kvadreret.

$$(m c^2)^2 - (m_0 c^2)^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu') \cos \theta$$

$$(m c^2)^2 + (m_0 c^2)^2 - 2 m c^2 m_0 c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu')$$

Trækkes den nederste fra den øverste med efterfølgende anvendelse af (48) fås

$$2 m c^2 m_0 c^2 - 2(m_0 c^2)^2 = 2(h\nu)(h\nu') - 2(h\nu)(h\nu') \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow m_0 c^2 (m c^2 - m_0 c^2) = (h\nu)(h\nu')(1 - \cos \theta)$$

$$\Leftrightarrow m_0 c^2 (h\nu - h\nu') = (h\nu)(h\nu')(1 - \cos \theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu - \nu'}{\nu \nu'} = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)$$

som endelig fører til

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad (49)$$

hvor  $\lambda$  og  $\lambda'$  er bølgelængde for hhv. den oprindelige og den spredte foton. Jo større afbøjning, desto større ændring i bølgelængden.

Størrelsen  $\frac{h}{m_0 c} = \frac{hc}{m_0 c^2}$  kaldes elek-

tronens comptonbølgelængde. Den er lig med ændringen i bølgelængde for en spredning på  $90^\circ$ . Den maksimale ændring, to gange comptonbølgelæng-

den, forekommer ved fuldstændig tilbagekastning.

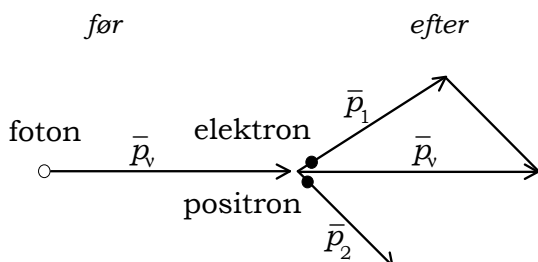
Comptonspredning af fotoner var selvsagt en bemærkelsesværdig erfaring i en tid hvor man arbejdede hårdt på at vænne sig til forestillingen om at fotoner og lys også har partikelegenskaber (-og omvendt: partikler har bølgeegenskaber).

I en laboratorieøvelse får I lov til selv at registrere denne proces live. Eller også viser jeg jer det. Eller osse kan jeg ikke få lortet til at virke!

-Men jf. Fysikkens spor s. 177.

## 8.4 Pardannelse

Fotoner med tilstrækkelig energi kan skabe et partikel-antipartikelpar, f. eks. et elektron-positronpar.



En betingelse er at  $E_\nu > 2 m_0 c^2$  hvor  $m_0$  er elektronens hvilemasse.

En betingelse er også at der er en partikel yderligere tilstede idet energi-bevarelse og impulsbevarelse ikke begge kan opfyldes alene med en foton som begyndelsespartikel og elektron-positron som slutprodukt. På tegningen er denne partikel udeladt.

At energibevarelse og impulsbevarelse ikke kan opfyldes alene med det på tegningen viste partikler kan indses således og med følgende betegnelser:

	før	efter	
	Foton	Elektron	Positron
Energi	$E_\nu$	$m_1 c^2$	$m_2 c^2$
Impuls	$\vec{p}_\nu$	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$

Energibevarelsen

$$E_\nu = m_1 c^2 + m_2 c^2$$

medfører sammen med (41) og (45)

$$\begin{aligned} E_\nu^2 &= (p_\nu c)^2 \\ &= (m_1 c^2)^2 + (m_2 c^2)^2 + 2 m_1 c^2 m_2 c^2 \\ &= 2(m_0 c^2)^2 + (p_1 c)^2 + (p_2 c)^2 + 2 m_1 m_2 c^4 \end{aligned}$$

Af impulstrekanter følger

$$p_\nu \leq p_1 + p_2$$

$$(p_\nu c)^2 \leq (p_1 c)^2 + (p_2 c)^2 + 2 p_1 p_2 c^2$$

Kombination heraf giver

$$(m_0 c^2)^2 + m_1 c^2 \cdot m_2 c^2 \leq p_1 c \cdot p_2 c$$

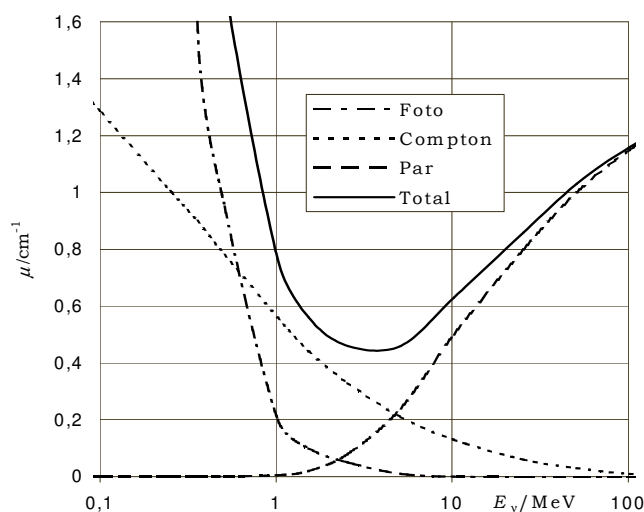
Denne ligning kan ikke opfyldes med  $m_0 > 0$  fordi (45) medfører at

$$m_1 c^2 > p_1 c \text{ og } m_2 c^2 > p_2 c$$

Ved fotoelektrisk effekt og pardannelse omsættes energien i fotonerne (den elektromagnetiske stråling) fuldstændigt.

Ved Comptonspredning fjernes den kun delvis. En mindre energirig foton fortsætter og kan bremes ved endnu en Comptonspredning, fotoelektrisk effekt eller en pardannelse (ved meget store energier).

Den følgende figur viser hvorledes de tre absorptionsprocesser bidrager til den samlede lineære absorptionskoefficient.



Samme oplysninger kan findes på s. 213 i databogen. Men pas på,  $\sigma$  betyder ikke  $\sigma!$

Vores  $\gamma$ -kilde er  $\text{Ba}^m \rightarrow \text{Ba} + \gamma$  hvor  $\gamma$ -kvantet har energien 662 keV. I laboratorieøvelsen  $\gamma$ -absorption i bly talte vi kun om fotoelektrisk effekt. Det er altså ikke helt korrekt.

Nødvendigheden af en partikel ud over fotonen betyder at fotoner ikke kan forsvinde ved pardannelse i det tomme rum - eller ved nogen anden proces. Faktisk findes den kraftigste registrerede  $\gamma$ -stråling i den kosmiske stråling. Og væsentlige oplysninger derudefra kommer dermed til vores jord.

Pardannelse er det modsatte af en annihilationsproces. Ved en sådan omdannes et partikel-antipartikelpar til to fotoner. De to fotoner deler energien og udsendes i hver sin retning da impulsen skal bevares.

## 9. KINETISK MOLEKYLTEORI

Den sidste anvendelse af Newtons love vi skal gøre i denne omgang, er ret omfattende og er alligevel kun en spag antydning af *den kinetiske molekylteori*s arbejdsmetode i forsøget på at udlede de makroskopiske gaslove ud fra mekaniske antagelser vedrørende de mikroskopiske forhold.

Den kinetiske molekylteori videreudvikledes i forrige århundrede til *den statistiske mekanik* og bidrog med sin succes væsentligt til den forestilling at Newtons love var helt generelle og repræsenterede det endelige grundlag for forståelsen af denne verden.

### 9.1 Makroskopisk udgangspunkt

For en given indespærret idealgas kan man måle de makroskopiske parametre

$$V, P \text{ og } T.$$

Og ved at eksperimenterere med gasen kan man let konstatere at de opfylder lovmæssigheden

$$\frac{PV}{T} \text{ er konstant}$$

Ved noget mere spidsfindige eksperimenter kan man indse at man kan definere begrebet et mol  $N_A$  og moltallet  $n$  således at

$$\frac{PV}{T} = nR \quad (50)$$

og

$$N = nN_A \quad (51)$$

hvor  $N$  er antallet af molekyler og hvor gaskonstanten  $R$  er den samme for alle idealgasser, jf. dér hvor du har lært om gaslovene.

Således opstillet bliver (50) en empirisk lov.

Selv om der indtil Einsteins beskrivelse i 1905 af de brownske bevægelser var fysikere der var skeptiske over for ideen om stoffernes molekylære opbygning, så arbejdede mange på grundlag af molekyler.

Problemet med molekylers eksistens var i forrige århundrede at de jo ikke kan iagttages.

Men man kan gøre nogle forudsætninger om deres mikroskopiske adfærd. På det grundlag kan man så prøve om man kan udlede noget om deres opførsel når de er i flok, altså udlede noget om deres makroskopiske egenskaber.

Vi vil nu vise at (50) kan udledes af nogle meget simple forudsætninger vedrørende molekyler under anvendelse af Newtons love.

Dermed er (50) ikke mere en empirisk lov, men udledt af nogle mere fundamentale sammenhænge.

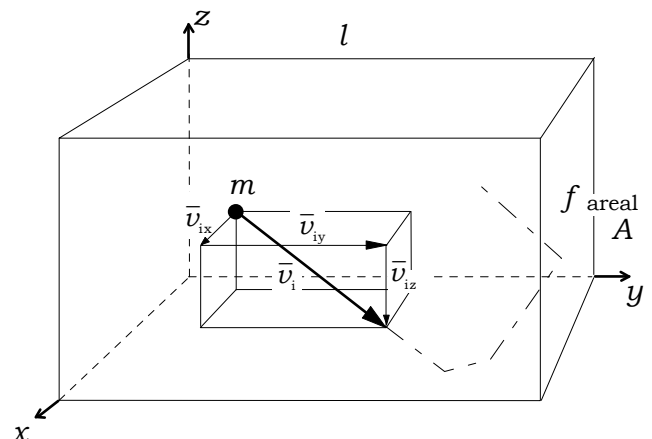
Forudsætningerne kaldes en model for en idealgas.

### 9.2 Mikroskopisk model

- Den betragtede idealgas består af ens molekyler.
- Molekylerne er frie (d.v.s. uden påvirkning af kræfter) undtaget kortvarigt ved sammenstød indbyrdes eller med væggene.
- Alle stød er fuldstændigt elastiske.

Antallet af molekyler kaldes  $N$ . Da de er ens, har de samme masse kaldet  $m$ .

Gassen tænkes indeholdt i en beholder som vist på figuren





Til et bestemt tidspunkt opskrives de  $N$  molekylers hastigheder:

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_N$$

Hver af disse hastigheder kan opløses efter de tre koordinatretninger så at

$$\bar{v}_i = \bar{v}_{ix} + \bar{v}_{iy} + \bar{v}_{iz} \quad (52)$$

hvor  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ .

Bemærk nu at der i det følgende bruges  $P$  for tryk,  $p$  for impuls,  $V$  for volumen og  $v$  for hastighed.

Vi søger trykket  $P$  i kassen. Det findes ved hjælp af gassens kraftpåvirkning af fladen  $f$  med arealet  $A$ .

Kraften findes ved gassens impulsændring pr. tid ved sammenstød med  $f$ .

Gassens impulsændring findes ved følgende tre trin:

- 1)  $\Delta\bar{p}$  for det  $i$ 'te molekyle ved ét stød.
- 2)  $\Delta\bar{p}$  for det  $i$ 'te molekyle i tidsrummet  $\Delta t$ .
- 3)  $\Delta\bar{p}$  for hele gassen i tidsrummet  $\Delta t$ .

#### Ad1)

Vi betragter det  $i$ 'te molekyle og antager at det er på vej hen mod  $f$ .

Endvidere antager vi at molekylerne ikke støder sammen.

Når molekylet støder fuldstændigt elastisk mod  $f$ , vil  $\bar{v}_{iy}$  ændres til  $-\bar{v}_{iy}$ , mens  $x$ - og  $z$ -komponenterne er uændrede.

Der gælder altså

$$|\Delta\bar{p}| = |m\Delta v_{iy}| = m2v_{iy} = 2m v_{iy}$$

pr. stød.

$\Delta\bar{p}$  peger ind i kassen og  $\perp$  på  $f$ .

#### Ad2)

Mens molekylet bevæger sig frem og tilbage mellem  $f$  og fladen parallelt med  $f$ , kan det støde mod de fire andre vægge. Ved disse sammenstød er hastighedens  $y$ -komponent uændret.

Molekylets projektion på  $y$ -aksen bevæger sig derfor frem og tilbage med konstant fart  $v_{iy}$ .

I løbet af tidsrummet  $\Delta t$  bevæger projektionen på  $y$ -aksen sig strækningen  $v_{iy}\Delta t$  og støder derfor mod fladen  $f$

$$\frac{v_{iy}\Delta t}{2l} \text{ gange.}$$

I løbet af tidsrummet  $\Delta t$  har molekylet fået en impulsændring ved stød mod  $f$  på

$$|\Delta\bar{p}| = \frac{v_{iy}\Delta t}{2l} 2m v_{iy} = \frac{mv_{iy}^2}{l} \Delta t$$

#### Ad3)

Hele gassens impulsændring ved sammenstød med  $f$  er derfor

$$\begin{aligned} |\Delta\bar{p}| &= \sum_{i=1}^N \frac{mv_{iy}^2}{l} \Delta t \\ &= \frac{m}{l} \Delta t \sum_{i=1}^N v_{iy}^2 \end{aligned}$$

Når gassens impuls ændres, er det fordi den fra  $f$  er påvirket af en kraft  $F$  som ifølge Newtons 2. lov har størrelsen

$$F = \frac{|\Delta\bar{p}|}{\Delta t} = \frac{m}{l} \sum_{i=1}^N v_{iy}^2$$

Kraften på gassen vender ind mod kassen.

Ifølge Newtons 3. lov er fladen derfor påvirket af en kraft fra gassen med samme størrelse pegende udad fra kassen.

Gastrykket i kassen er derfor

$$P = \frac{F}{A} = \frac{m}{Al} \sum_{i=1}^N v_{iy}^2$$

Heraf sluttes

$$PV = m \sum_{i=1}^N v_{iy}^2$$

idet  $V = Al$  er kassens volumen.

Dette resultat blev opnået ved at betragte en flade som stod vinkelret på  $y$ -aksen.

Ved at behandle tilsvarende flader for de to andre akser kan man finde

$$PV = m \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \quad \text{og} \quad PV = m \sum_{i=1}^N v_{iy}^2$$

Ved addition af disse tre ligninger ser vi at

$$\begin{aligned} 3PV &= m \sum_{i=1}^N (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2) \\ &= m \sum_{i=1}^N v_i^2 \end{aligned}$$

ifølge (52) og den tredimensionale Pythagoras. Heraf følger videre at

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}PV &= \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^N v_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}mv_i^2 = \sum_{i=1}^N e_i^2 = E_{\text{kin}} \end{aligned} \quad (53)$$

hvor  $e_i$  er det  $i$ te molekyles kinetiske energi og  $E_{\text{kin}}$  er gassens samlede kinetiske energi.

Ved sammenligning med (50) har vi derfor

$$\frac{3}{2}nRT = E_{\text{kin}} \quad (54)$$

eller

$$T = \frac{2}{3R} \frac{E_{\text{kin}}}{n}$$

Denne ligning har den vidunderlige tolkning at begrebet temperatur som indtil dette hellige øjeblik alene har været noget I målte på et kviksølvtermometer, på grundlag af vores model simpelthen er et mål for gassens *kinetiske energi pr. mol*. Og sammenhængen mellem  $T$  og  $E$  afhænger ikke af gassen da  $R$  er universel.

Til overflod lader resultatet sig let teste. Den naturlige forudsætning om de kortvarige stød betyder at den potentielle energi som kan være oplagret under stødene, er forsvindende i forhold til den kinetiske energi.

Det vil sige at den energi vi tilfører, bliver til kinetisk energi, og vi får ifølge (54) følgende sammenhænge mellem energitilførsel og temperaturstigning

$$\Delta E = \frac{3}{2}Rn\Delta T = c_v n\Delta T \quad (55)$$

hvor  $c_v = \frac{3}{2}R$  kaldes den molære varmekapacitet ved konstant volumen. (sml. med  $\Delta E = cm\Delta T$ .)

Modellen påstår altså at

$$c_v = \frac{3}{2} \cdot 8,21 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} = 12,3 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$$

### 9.3 Diskussion af modellen

Gas	$c_v$ / (J/K·mol)	
	Ukendt kilde	Kay&Laby
He	12,56	12,76
Ne		12,67
Ar	12,56	12,48
Kr		12,31
Xe		12,48
H <sub>2</sub>	28,5	20,47
N <sub>2</sub>	25,1	20,77
O <sub>2</sub>	20,1	21,00
CO		22,44
NO	23,8	21,38
NO <sub>2</sub>		28,10
H <sub>2</sub> O	21,0	25,19
CO <sub>2</sub>	28,5	28,54
NH <sub>3</sub>		26,27

Tabellen viser at énatomige gasser svarer fint til modellen.

Kendsgerningerne i tabellen viser imidlertid også klart at der er noget vi har overset for fleratomige gasser.

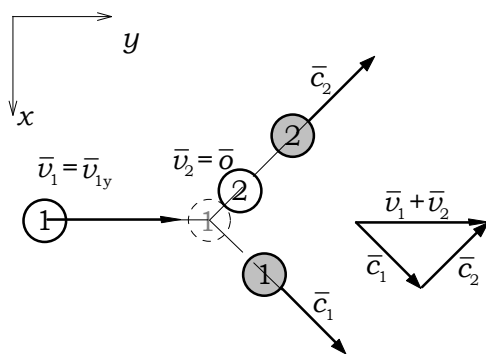
Kuglesymmetriske atomer kan ikke rotere, men det kan fleratomige molekyler! Og det betyder at energitilskud ikke alene går til at skubbe molekylerne rundt og skubbe på vægge. Vi må derfor skelne mellem translatorisk og rotatorisk kinetisk energi. Og det er den translatoriske som indgår i forbindelse med de udledte formler. For énatomige gasser er der ingen forskel. For fleratomige må vi huske at  $E_{\text{kin}}$  betyder *translatorisk*  $E_{\text{kin}}$ .

Undervejs i beregningerne indsneget vi den urealistiske antagelse at molekylerne ikke støder sammen. Det gjorde vi for at kunne overskue regningerne. Men modellen gav os ikke lov til det.

Vi kan imidlertid indse at sammenstød mellem molekylerne ikke ændrer ved de opstillede formler.

Først ser vi på et helt konkret eksempel som viser ideen.

Molekyle 1 er på vej hen mod fladen  $f$  og støder ind i molekyle 2 der ligger stille. Vi antager at molekyle 1 afbøjes  $45^\circ$ . Molekyle 2 vil ifølge (46) også bevæge sig i en vinkel på  $45^\circ$  med molekyle 1's oprindelige retning.



Vi regner med at molekylerne efter stødet bevæger sig i  $xy$ -planen.

I vores regninger ville molekyle 1 uden stød mod 2 bidrage til trykket på  $f$  derved at det ved hvert sammenstød ændrede impuls  $2mv_1$  (Ad1).

Ved sammenstødet mellem 1 og 2 bliver  $v_{1y}$  halveret,  $c_{1y} = \frac{1}{2}v_{1y}$ . Både stødhyppigheden og impulsændringen bliver altså halveret. Men også molekyle 2 som før lå stille bidrager med dette beløb hvorfor trykbidraget på  $f$  i alt er halveret.

Til gengæld vil molekyle 1 og 2 nu begge give et ligeså stort trykbidrag på en flade hvor de før gav bidraget 0.

Uden antagelsen om de  $45^\circ$  har vi dog stadig ifølge (45) for sammenstød mellem det  $j$ 'te og det  $k$ 'te molekyle

$$\bar{v}_j^2 + \bar{v}_k^2 = \bar{c}_j^2 + \bar{c}_k^2 \quad (56)$$

Hvis vi altså tager hensyn til et stød mellem disse to molekyler, så skal vi i (53) erstatte  $\bar{v}_j^2 + \bar{v}_k^2$  med  $\bar{c}_j^2 + \bar{c}_k^2$ . Men ifølge (56) ændrer det ikke på trykket i beholderen.

Opmærksomhed overfor (53) viser at energibevarelsen ved de enkelte sammenstød sikrer at den lange sum ikke ændrer sig ved molekylsammenstød.

## 9.4 Middelenergi pr. molekyle

Hvis vi kalder middelværdien af det enkelte molekyles energi for  $\langle e \rangle$  giver (54) ved division med antallet  $N = nN_A$  (51) af molekyler

$$\langle e \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (57)$$

hvor  $k = R/N_A$  er Boltzmanns konstant. Dette er det meget brugte udtryk for en mikroskopisk, termisk partikels translatorisk-kinetiske energi.

Ordet termisk i denne forbindelse betyder at partiklen deltager i den kollektive brownske bevægelse karakteristisk for den herskende temperatur. Påpejningen af at en partikel er blevet termisk er nødvendig i forbindelse med henfald eller neutronfrigørelse fra fissioner. Her opstår  $\alpha$ - eller  $\beta$ -partikler eller neutroner som til at begynde med har meget større energi, men som efter et antal sammenstød (fra få ( $\beta$ ) til  $\sim 10^5$  ( $\alpha$ )) ender med at blive termiske.

## 10. OPGAVER

**Opg. 1.** Find  $g$  på månens plads i jordens gravitationsfelt.

Sammenlign med centripetalaccelerationen for månens bevægelse.

**Opg. 2.** Find  $g$  på jordens plads i solens gravitationsfelt.

Sammenlign med centripetalaccelerationen for jordens bevægelse.

**Opg. 3.** Opgave 1 og 2 rejser et væmmeligt problem vedrørende inertialsystemer!! (-?)

**Opg. 4.** Brug (27) og (27') til at udfylde følgende skema og tolk indholdet af hver enkel linie. ( $m_1=0$  og  $m_2 > 0$  betyder grænsetilfældet  $m_1 \ll m_2$ .)

I skemaet er  $m > 0$  og  $v > 0$ .

$m_1$	$m_2$	$v_1$	$v_2$	$c_1$	$c_2$
0	$m$	$v$	0		
$m$	0	$v$	0		
$m$	$m$	$v$	0		
$m$	$m$	$v$	$-v$		
$m$	$m$	$v_1(>v_2)$	$v_2$		
$2m$	$m$	$v$	$-2v$		
$m$	$3m$	$v$	0		
$m$	$3m$	$\frac{1}{2}v$	$-\frac{1}{2}v$		

Såddennåed er sådden en god kontrol når man tror sig færdig med sådden et teoretisk problem. Jeg opdagede selv en fejl da jeg løste denne opgave!!

Find på lidt tilsvarende for det fuldstændigt uelastiske stød.

Hvad mon tanken er med de to sidste linier i skemaet? Noget med en luftpudebænk?

**Opg. 5.** Find  $Q$ -værdien for det fuldstændigt uelastiske stød i det generelle tilfælde behandlet i 6.2.

**Opg. 6.** Med  $v_1 > 0$  og  $v_2 = 0$ , find da den kinetiske energi for  $m_1$  efter stødet i forhold til før stødet som funktion af  $m_1/m_2$ . Tegn forholdet.

**Opg. 7.** Hurtige neutroner fra fissioner frigøres med energien ca. 2 MeV.

Kan man regne klassisk på dem?

For neutroner mod både  $^{235}\text{U}$  og  $^{238}\text{U}$  gælder ved denne energi at  $\sigma$  er ca. 7,5 b.

Find fissionsneutronernes middelvejlængde i uranbrændslet. (jf. (53) og (54)). Kommer de ud af brændselsstavene?

**Opg. 8.** Hvis fissionsneutronerne (2 MeV) i middel mister halvdelen af deres energi ved hvert stød mod en proton, hvor mange stød skal der så til at gøre en neutron termisk? (jf.(57))

For fissionsneutroner mod protoner er spredningstværsnittet ca. 5 b. I løbet af nedbremsningen vokser det til ca. 45 b som i skemaet på s. 16.

Under antagelse af  $\sigma = 25\text{b}$ , hvad er da middelvejlængden pr. stød?

Hvor lang vej tilbagelægger en neutron inden den er termisk?

**Opg. 9.** Dette er tænkt som en opgave vedrørende almindeligt luft. For at gøre det nemmere lader vi som om luft kun består af  $\text{N}_2$ -molekyler.

Find hastigheden for et luftmolekyle som bevæger sig med middelhastigheden ved normale omstændigheder.

Find

Med  $v = 1, 2$  og  $3$  vis da at  $\langle v \rangle^2 = 4$  og  $\langle v^2 \rangle = 4,67$ .

Med  $v = 1.9, 2$  og  $2.1$  vis da at forskellen mellem  $\langle v \rangle^2$  og  $\langle v^2 \rangle$  er langt mindre.

Hvis spredningen er relativt lille er  $\langle v \rangle^2$  og  $\langle v^2 \rangle$  ikke meget afvigende.

Find under antagelse af lille spredning middelhastigheden af et .

**Opg.10** Aflæs  $\mu$  ved 662 keV (det bliver meget cirka!, find  $x_{1/2}$  og sammenlign med din laboratorieøvelse.

**Opg.11** Beregn comptonbølgelængden for en elektron (gang med  $c$  og brug genvejskonstanterne!)

Ved hvilken afbøjningsvinkel mister fotonen mest energi?

Find da den spredte fotons energi  $E_v$ , som funktion af den oprindelige fotonenergi  $E_v$ .

Beregn den maksimale energioverførsel til en elektron igen som funktion af  $E_v$ .

Beregn comptonkantens og backscatterkantens placering for vores gammakilde, 662 keV.

**Opg.12** Vis at den comptonspredte fotons energi kan findes ved

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)}$$

## 11. STIKORDSREGISTER

- Absorptionskoefficient;17;20  
 Acceleration;2;3;4;10  
 Aktion;6  
 Anden lov;6  
 Anden lov, Newtons;6  
 Anni Mirabilis;8  
 Annihilationsproces;20  
 Arealhastighed;8;9;11  
 Aristoteles;5  
 Astronomi;5  
 Atomer;23  
 Banekurve;1;3  
 barn;16  
 Begyndelsesbetingelser;3;9;10  
 Begyndeshastighed;3  
 Begyndelsessted;3  
 Bevarelsessætning;7  
 Bevægelseslove;7  
 Bevægelsesmængde;6;7  
 Billard;5;13  
 Brahe;5;8  
 Brahe, Thygo;5  
 Brownske bevægelser;21  
 Centralfelt;7  
 Centrallegeme;7;12  
 Comptonbølgelængde;19;26  
 Comptonspredning;18;20;26  
 Demokrati;5  
 Descartes;5  
 Deterministisk;5  
 Differentiation;1;2  
 Distributive love;1  
 Elastisk;13;16;22  
 Elastisk stød;13  
 Ellipse;10  
 Energi;11;12;13;14;16;17;18;20;23;24  
   ;25;26  
 Energibevarelse;20  
 Energiudveksling;17  
 Excentricitet;10  
 Fjerde lov;7  
 Fotoelektrisk effekt;17;20  
 Foton;17;18;19;20  
 Frigørelsesbevægelser;5  
 Første lov, Newtons;5;6  
 Gallilei;5  
 Gaskonstanten;21  
 Gaslove;21  
 Gravitationskræfter;7  
 Gravitationsloven;7  
 Gud;5  
 Hastighed;2;3;4;5;6;11;18;22  
 Hyperbel;11  
 Idealgas;1;21  
 Imperialismen;5  
 Impuls;6;7;17;18;19;22;24  
 Impulsbevarelse;13;14;20  
 Impulsændring;22  
 Indre kræfter;7  
 Industrielle revolution;5  
 Inertialsystem;5;6  
 Inertiens lov;5  
 Isoleret system;7  
 Jordan;5;6  
 Jævn bevægelse;3  
 Jævn cirkelbevægelse;4  
 Kepler;5;8  
 Kinematik;1  
 Kinetisk energi;13;14;23  
 Kirken;5  
 Klassisk mekanik;6  
 Komet;12  
 Koordinater;1;3;4;8;10  
 Koordinatfunktion;1  
 Koordinatsystem;1;5  
 Kopernicus;5  
 Kraft;5;6;7  
 Kuhn, thomas s.;5  
 Kuhn, Thomas s.;5  
 Kuhn, Thomas S.;5  
 Kvantefysik;5  
 Kvantefysikken;5  
 Kvantemekanik;5;6  
 Kvantemekanikken;5;6  
 Latin;5  
 Lod;6  
 Luftpudebænk;7;13;25  
 Makker;6  
 Makkere;7  
 Makroskopisk;15;21  
 Masse;6;7;9;18;19;21  
 Middelalder;5  
 Middelalderen;5  
 Middelveljængde;17;25  
 Mikroskopisk;15;21  
 Moderne tid;5  
 Modsatrettede kræfter;5;6  
 Mol;21;23  
 Molekyle;15;16;17;22;24  
 Molære varmfylde;23  
 Månen;6  
 Natursyn;5  
 Newton;5;6;8  
 Newtons 1. lov;5;6  
 Newtons 2. lov;6  
 Newtons 3. lov;7;12;13  
 Newtons første lov;7  
 Omløbstid;11  
 Oplysningstiden;5  
 Par;6

Parabel;3;11  
Paradigme;5  
Paradigmeskifte;5  
Parameterfremstilling;3  
Pardannelse;6;20  
Partikler;7;14;15;16;17;18;19;20  
Planeter;5  
Principia;5  
R;21;23;24  
Radius;4;16  
Reaktion;6  
Resonansområdet;15  
Resulterende kraft;5;6  
Revolutioner;5  
Roterende enhedsvektor;4  
Råstofjagten;5  
Stamfunktion;6  
Stød;1;12;13;14;15;16;17;18;21;22;23  
;24;25  
Ståsted;5  
Termisk;16;24;25  
Tidevand;7  
Togvogn;5  
Totale impuls;7  
Tredje lov, Newtons;7;12;13  
Tryk;22  
Tværsnit;15;16;17  
Tyngdekraft;5;6;7  
Tyngdekræfter;7  
Uelastisk stød;13  
Universet;1  
Vektorer;1  
Vektorfunktion;1;4  
Verdensbillede;5  
Volumen;22;23  
Ydre kræfter;7;14  
Øjeblikssacceleration;2  
Øjeblikshastighed;2  
Økonomisk liberalisme;5